

中华人民共和国国家标准

物理科学和技术中使用的数学符号

GB 3102.11—93

Mathematical signs and symbols for use in the physical
sciences and technology

代替 GB 3102.11—86

引言

本标准参照采用国际标准 ISO 31-11:1992《量和单位 第十一部分:物理科学和技术中使用的数学标志与符号》。

本标准是目前已经制定的有关量和单位的一系列国家标准之一,这一系列国家标准是:

GB 3100 国际单位制及其应用;

GB 3101 有关量、单位和符号的一般原则;

GB 3102.1 空间和时间的量和单位;

GB 3102.2 周期及其有关现象的量和单位;

GB 3102.3 力学的量和单位;

GB 3102.4 热学的量和单位;

GB 3102.5 电学和磁学的量和单位;

GB 3102.6 光及有关电磁辐射的量和单位;

GB 3102.7 声学的量和单位;

GB 3102.8 物理化学和分子物理学的量和单位;

GB 3102.9 原子物理学和核物理学的量和单位;

GB 3102.10 核反应和电离辐射的量和单位;

GB 3102.11 物理科学和技术中使用的数学符号;

GB 3102.12 特征数;

GB 3102.13 固体物理学的量和单位。

上述国家标准贯彻了《中华人民共和国计量法》、《中华人民共和国标准化法》、国务院于1984年2月27日公布的《关于在我国统一实行法定计量单位的命令》和《中华人民共和国法定计量单位》。

本标准特殊说明:

变量(例如 x, y 等)、变动附标(例如 $\sum x_i$ 中的 i)及函数(例如 f, g 等)用斜体字母表示。点 A 、线段 AB 及弧 CD 用斜体字母表示。在特定场合中视为常数的参数(例如 a, b 等)也用斜体字母表示。

有定义的已知函数(例如 $\sin, \exp, \ln, \Gamma$ 等)用正体字母表示。其值不变的数学常数(例如 $e = 2.718\ 281\ 8\cdots, \pi = 3.141\ 592\ 6\cdots, i^2 = -1$ 等)用正体字母表示。已定义的算子(例如 $\operatorname{div}, \delta x$ 中的 δ 及 df/dx 中的 d)也用正体字母表示。

数字表中数(例如 351 204, 1.32, 7/8)的表示用正体。

函数的自变量写在函数符号后的圆括号中,且函数符号与圆括号之间不留空隙,例如 $f(x), \cos(\omega t + \varphi)$ 。如果函数的符号由两个或更多的字母组成且自变量不含 $+$, $-$, $\times$, $\cdot$ 或 $/$ 等运算时,括于自变量的圆括号可以省略,这时在函数与自变量符号之间应留一空隙,例如 $\operatorname{ent} 2.4, \sin n\pi, \operatorname{arcosh} 2A$,

Ei x 。

为了避免混淆,常采用圆括号。例如不应将 $\cos(x)+y$ 或 $(\cos x)+y$ 写成 $\cos x+y$, 因为后者可能被误解为 $\cos(x+y)$ 。

当一个表示式或方程式需断开、用两行或多行来表示时,最好在紧靠其中符号 $=, +, -, \pm, \mp, \times, \cdot$ 或 $/$ 后断开,而在下一行开头不应重复这一符号。

用来表示某确定物理量的标量、矢量和张量与坐标系的选择无关,尽管矢量或张量的分量与坐标系的选择有关。

对“矢量 $\mathbf{a}$ 的分量”即 a_x, a_y 和 a_z 与“ $\mathbf{a}$ 的分矢量”即 $a_x \mathbf{e}_x, a_y \mathbf{e}_y$ 和 $a_z \mathbf{e}_z$ 加以区别是重要的。

径矢量的笛卡儿分量等同于径矢量端点的笛卡儿坐标。

物理量中的矢量可写成数值矢量与单位相乘的形式,

例:

$$\mathbf{F} = \overbrace{(3 \text{ N}, -2 \text{ N}, 5 \text{ N})}^{\text{分量 } F_x} = \overbrace{(3, -2, 5)}^{\text{数值矢量}} \underbrace{\text{N}}_{\text{单位}}$$

数值
单位
单位

这里的单位 N 为标量,同样的办法也适用于二阶和高阶张量。

本标准的主要内容以表格形式列出。

如果在表格的同一项号中所给出的数学符号或表示式多于一个时,它们应是等同的。但在列出的顺序中,总是将常用的数学符号、相应的名称或表示式靠前列出。

在本表格备注一栏中给出的是符号的使用说明和应用示例。

在本标准中,将国际标准 ISO 31-11:1992《量和单位 第十一部分:物理科学和技术中使用的数学标志与符号》称为[1],将原国家标准 GB 789—65《数学符号(试行草案)》称为[2]。

1 主题内容与适用范围

本标准规定了物理科学和技术中使用的数学符号的含义、读法和应用。

本标准规定物理科学、工程技术和有关的教学中一般常用的数学符号;过于专门的数学符号未列入。

2 物理科学和技术中使用的数学符号表

2.1 几何符号¹⁾

项号	符号	意义或读法	备注及示例
11-1.1	$\overline{AB}, AB$	[直] ²⁾ 线段 AB the line segment AB	用 $ AB $, AB 或小写的拉丁字母表示该直线段的长。 矢量的表示参阅 11-12.1
11-1.2	$\angle$	[平面]角 plane angle	参阅 GB 3102.1 的 1-1 及 1-1. a ~ 1-1. d
11-1.3	$\widehat{AB}$	弧 AB the arc AB	当 $\widehat{AB}$ 为圆弧时,可用 $\widehat{AB}$ 表示圆弧 AB [对应]的度数
11-1.4	π	圆周率 ratio of the circumference of a circle to its diameter	圆周长与直径的比, $\pi = 3.141\ 592\ 6\cdots$
11-1.5	$\triangle$	三角形 triangle	
11-1.6	$\square$	平行四边形 parallelogram	
11-1.7	$\odot$	圆 circle	
11-1.8	$\perp$	垂直 is perpendicular to	
11-1.9	$//, \parallel$	平行 is parallel to	$\underline{\underline{\parallel}}$ 用于表示平行且相等
11-1.10	$\sim$	相似 is similar to	
11-1.11	$\cong$	全等 is congruent to	

1) 几何符号取材于[2]。

2) 行文中方括号内的文字表示可以略去或不读,下同。

2.2 集合论符号

项号	符号	应用	意义或读法	备注及示例
11-2.1	$\in$	$x \in A$	x 属于 A ; x 是集合 A 的一个元[素] x belongs to A ; x is an element of the set A	集合 A 可简称为集 A
11-2.2	$\notin$	$y \notin A$	y 不属于 A ; y 不是集合 A 的一个元[素] y does not belong to A ; y is not an element of the set A	也可用 $\notin$ 或 $\bar{\in}$
11-2.3	$\ni$	$A \ni x$	集 A 包含[元] x the set A contains x (as element)	
11-2.4	$\nexists$	$A \nexists y$	集 A 不包含[元] y the set A does not contain y (as element)	也可用 $\nexists$ 或 $\bar{\ni}$
11-2.5	$\{, \dots, \}$	$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	诸元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 构成的集 set with elements $x_1, x_2, \dots, x_n$	也可用 $\{x_i, i \in I\}$, 这里的 I 表示指标集
11-2.6	$\{ \}$	$\{x \in A p(x)\}$	使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元[素]之集 set of those elements of A for which the proposition $p(x)$ is true	例: $\{x \in R x \leq 5\}$, 如果从前后关系来看, 集 A 已很明确, 则可使用 $\{x p(x)\}$ 来表示, 例如: $\{x x \leq 5\}$ $\{x \in A p(x)\}$ 有时也可写成 $\{x \in A; p(x)\}$ 或 $\{x \in A; p(x)\}$
11-2.7	card	card(A)	A 中诸元素的数目; A 的势(或基数) number of elements in A ; cardinal of A	
11-2.8	$\emptyset$		空集 the empty set	

项号	符号	应用	意义或读法	备注及示例
11-2.9	$\mathbf{N}, \mathbf{N}$		非负整数集; 自然数集 the set of positive integers and zero; the set of natural numbers	$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 自 11-2.9 至 11-2.13 集内排除 0 的集, 应上标星号或下标 + 号, 例如 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$; $\mathbf{N}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$
11-2.10	$\mathbf{Z}, \mathbf{Z}$		整数集 the set of integers	$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 参阅 11-2.9 的备注
11-2.11	$\mathbf{Q}, \mathbf{Q}$		有理数集 the set of rational numbers	参阅 11-2.9 的备注
11-2.12	$\mathbf{R}, \mathbf{R}$		实数集 the set of real numbers	参阅 11-2.9 的备注
11-2.13	$\mathbf{C}, \mathbf{C}$		复数集 the set of complex numbers	参阅 11-2.9 的备注
11-2.14	$[,]$	$[a, b]$	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b 的闭区间 closed interval in $\mathbf{R}$ from a (included) to b (included)	$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$
11-2.15	$] ,]$ $(,]$	$]a, b]$ $(a, b]$	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b (含于内) 的左 半开区间 left half-open interval in $\mathbf{R}$ from a (excluded) to b (included)	$]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$
11-2.16	$[, [$ $[,)$	$[a, b[$ $[a, b)$	$\mathbf{R}$ 中由 a (含于内) 到 b 的右 半开区间 right half-open interval in $\mathbf{R}$ from a (included) to b (excluded)	$[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$
11-2.17	$] , [$	$]a, b[$ (a, b)	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b 的开区间 open interval in $\mathbf{R}$ from a (excluded) to b (excluded)	$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$

项号	符号	应用	意义或读法	备注及示例
11-2.18	$\subseteq$	$B \subseteq A$	B 含于 A ; B 是 A 的子集 B is included in A ; B is a subset of A	B 的每一元均属于 A , 也可以用 $\subset$
11-2.19	$\subsetneq$	$B \subsetneq A$	B 真包含于 A ; B 是 A 的真子集 B is properly included in A ; B is a proper subset of A	B 的每一元均属于 A , 但 B 不等于 A
11-2.20	$\not\subseteq$	$C \not\subseteq A$	C 不包含于 A ; C 不是 A 的子集 C is not included in A ; C is not a subset of A	也可用 $\not\subset$
11-2.21	$\supseteq$	$A \supseteq B$	A 包含 B [作为子集] A includes B (as subset)	A 包含了 B 的每一元, 也可用 $\supset$ 。 $A \supseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 的含义相同
11-2.22	$\supsetneq$	$A \supsetneq B$	A 真包含 B A includes B properly	A 包含了 B 的每一元, 但 A 不等于 B 。 $A \supsetneq B$ 与 $B \subsetneq A$ 的含义相同
11-2.23	$\not\supseteq$	$A \not\supseteq C$	A 不包含 C [作为子集] A does not include C (as subset)	也可用 $\not\supset$ 。 $A \not\supseteq C$ 与 $C \not\subseteq A$ 的含义相同
11-2.24	$\cup$	$A \cup B$	A 与 B 的并集 union of A and B	属于 A 或属于 B 或属于两者的所有元的集。 $A \cup B = \{x x \in A \vee x \in B\}$ 参阅 11-3.2
11-2.25	$\bigcup$	$\bigcup_{i=1}^n A_i$	诸集 $A_1, \dots, A_n$ 的并集 union of a collection of sets $A_1, \dots, A_n$	$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 至少属于诸集 $A_1, \dots, A_n$ 之一的所有元的集。 也可用 $\bigcup_{i=1}^n$, $\bigcup_{i \in I}$ 与 $\bigcup_{i \in I}$, 其中 I 表示指标集

项号	符号	应用	意义或读法	备注及示例
11-2.26	$\cap$	$A \cap B$	A 与 B 的交集 intersection of A and B	所有既属于 A 又属于 B 的元的集。 $A \cap B = \{x x \in A \wedge x \in B\}$ 参阅 11-3.1
11-2.27	$\bigcap$	$\bigcap_{i=1}^n A_i$	诸集 $A_1, \dots, A_n$ 的交集 intersection of a collection of sets $A_1, \dots, A_n$	$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 共属于诸集 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的所有元的集。 也可用 $\bigcap_{i=1}^n$, $\bigcap_{i \in I}$ 与 $\bigcap_{i \in I}$, 其中 I 表示指标集
11-2.28	$\setminus$	$A \setminus B$	A 与 B 之差; A 减 B difference of A and B ; A minus B	所有属于 A 但不属于 B 的元的集。 $A \setminus B = \{x x \in A \wedge x \notin B\}$ 不用 $A - B$
11-2.29	$\complement$	$\complement_A B$	A 中子集 B 的补集或余集 complement of subset B of A	A 中不属于子集 B 的所有元的集。 $\complement_A B = \{x x \in A \wedge x \notin B\}$ 如果行文中集 A 已很明确, 则常可省去符号 A 。 也可写成 $\complement_A B = A \setminus B$
11-2.30	$(,)$	(a, b)	有序偶 a, b ; 偶 a, b ordered pair a, b ; couple a, b	$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 及 $b = d$ 不与其他符号混淆时, 也可用 $\langle a, b \rangle$
11-2.31	$(, \dots,)$	$(a_1, a_2, \dots, a_n)$	有序 n 元组 ordered n -tuple	也可用 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
11-2.32	$\times$	$A \times B$	A 与 B 的笛卡儿积 cartesian product of A and B	所有由 $a \in A$ 与 $b \in B$ 作成的有序偶 (a, b) 的集。 $A \times B = \{(a, b) a \in A \wedge b \in B\}$ $A \times A \times \dots \times A$ 记成 A^n , 其中 n 为乘积中的因子数

项号	符号	应用	意义或读法	备注及示例
11-2.33	Δ	Δ_A	$A \times A$ 中点对 (x, x) 的集, 其中 $x \in A$; $A \times A$ 的对角集 set of pairs (x, x) of $A \times A$, where $x \in A$; diagonal of the set $A \times A$	$\Delta_A = \{(x, x) x \in A\}$ 也可用 id_A

2.3 数理逻辑符号

项号	符号	应用	符号名称	意义、读法及备注
11-3.1	$\wedge$	$p \wedge q$	合取符号 conjunction sign	p 和 q
11-3.2	$\vee$	$p \vee q$	析取符号 disjunction sign	p 或 q
11-3.3	$\neg$	$\neg p$	否定符号 negation sign	p 的否定; 不是 p ; 非 p
11-3.4	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	推断符号 implication sign	若 p 则 q ; p 蕴含 q 也可写为 $q \Leftarrow p$ 有时也用 $\rightarrow$
11-3.5	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	等价符号 equivalence sign	$p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$; p 等价于 q 有时也用 $\leftrightarrow$
11-3.6	$\forall$	$\forall x \in A \quad p(x)$ $(\forall x \in A) \quad p(x)$	全称量词 universal quantifier	命题 $p(x)$ 对于每一个属于 A 的 x 为真。 当考虑的集合 A 从上下文看很明白时, 可用记号 $\forall x \quad p(x)$
11-3.7	$\exists$	$\exists x \in A \quad p(x)$ $(\exists x \in A) \quad p(x)$	存在量词 existential quantifier	存在 A 中的元 x 使 $p(x)$ 为真。 当考虑的集合 A 从上下文看很明白时, 可用记号 $\exists x \quad p(x)$ 。 $\exists!$ 或 $\overset{1}{\exists}$ 用来表示存在一个且只有一个元素使 $p(x)$ 为真

2.4 杂类符号

项号	符号	应用	意义或读法	备注及示例
11-4.1	$=$	$a=b$	a 等于 b a is equal to b	$\equiv$ 用来强调这一等式是数学上的恒等[式]
11-4.2	$\neq$	$a \neq b$	a 不等于 b a is not equal to b	
11-4.3	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$a \stackrel{\text{def}}{=} b$	按定义 a 等于 b 或 a 以 b 为定义 a is definition equal to b	例: $p \stackrel{\text{def}}{=} mv$ 式中 p 为动量, m 为质量, v 为速度 也可用 $\stackrel{\text{d}}{=}$
11-4.4	$\triangleq$	$a \triangleq b$	a 相当于 b a corresponds to b	例如在地图上当 1 cm 相当于 10 km 长时,可写成 $1 \text{ cm} \triangleq 10 \text{ km}$
11-4.5	$\approx$	$a \approx b$	a 约等于 b a is approximately equal to b	符号 $\simeq$ 被用于“渐近等于”;参阅 11-6.11
11-4.6	$\propto$	$a \propto b$	a 与 b 成正比 a is proportional to b	在[1]中也用 $\sim$
11-4.7	$:$	$a:b$	a 比 b ratio of a to b	选自[2]
11-4.8	$<$	$a < b$	a 小于 b a is less than b	
11-4.9	$>$	$b > a$	b 大于 a b is greater than a	
11-4.10	$\leq$	$a \leq b$	a 小于或等于 b a is less than or equal to b	不用 $\leq$
11-4.11	$\geq$	$b \geq a$	b 大于或等于 a b is greater than or equal to a	不用 $\geq$
11-4.12	$\ll$	$a \ll b$	a 远小于 b a is much less than b	
11-4.13	$\gg$	$b \gg a$	b 远大于 a b is much greater than a	

项号	符号	应用	意义或读法	备注及示例
11-4.14	∞		无穷[大]或无限[大] infinity	
11-4.15	$\sim$	$a \sim b$	数字范围 the range of numbers	这里的 a 和 b 为不同的实数， 例如 5~10 表示由 5 至 10。 选自[2]
11-4.16		13.59	小数点 decimal point	整数和小数之间用处于下方位置的小数点“.”分开。 参阅 GB 3101 的 3.3.2
11-4.17		$3.12\dot{3}8\dot{2}$	循环小数 circulator	即：3.123 823 82...
11-4.18	%	5%~10%	百分率 percent	~前的%不应省略
11-4.19	()		圆括号 parentheses	
11-4.20	[]		方括号 square brackets	
11-4.21	{ }		花括号 braces	
11-4.22	< >		角括号 angle brackets	
11-4.23	±		正或负 positive or negative	
11-4.24	∓		负或正 negative or positive	
11-4.25	max		最大 maximum	
11-4.26	min		最小 minimum	

2.5 运算符号

项号	符号,应用	意义或读法	备注及示例
11-5.1	$a+b$	a 加 b a plus b	
11-5.2	$a-b$	a 减 b a minus b	
11-5.3	$a\pm b$	a 加或减 b a plus or minus b	
11-5.4	$a\mp b$	a 减或加 b a minus or plus b	$-(a\pm b)=-a\mp b$
11-5.5	$ab, a\cdot b, a\times b$	a 乘以 b a multiplied by b	参阅 11-2.32, 11-12.6 及 11-12.7。 数的乘号用叉($\times$)或上下居中的圆点($\cdot$)。如出现小数点符号时,数的相乘只能用叉。 参阅GB 3101的3.1.3和3.3.3
11-5.6	$\frac{a}{b}, a/b, ab^{-1}$	a 除以 b 或 a 被 b 除 a divided by b	参阅 GB 3101 的 3.1.3
11-5.7	$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1+a_2+\cdots+a_n$	也可记为 $\sum_{i=1}^n a_i, \sum_i a_i, \sum_i a_i, \sum a_i$ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$
11-5.8	$\prod_{i=1}^n a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$	也可记为 $\prod_{i=1}^n a_i, \prod_i a_i, \prod_i a_i, \prod a_i$ $\prod_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot \cdots$
11-5.9	a^p	a 的 p 次方或 a 的 p 次幂 a to the power p	
11-5.10	$a^{1/2}, a^{\frac{1}{2}}, \sqrt{a}, \sqrt{a}$	a 的二分之一次方; a 的平方根 a to the power 1/2; square root of a	参阅 11-5.11

项号	符号,应用	意义或读法	备注及示例
11-5.11	$a^{1/n}, a^{\frac{1}{n}},$ $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}$	a 的 n 分之一次方; a 的 n 次方根 a to the power $1/n$; n th root of a	在使用符号 $\sqrt{\quad}$ 或 $\sqrt[n]{\quad}$ 时,为了避免混淆,应采用括号把被开方的复杂表示式括起来
11-5.12	$ a $	a 的绝对值; a 的模 absolute value of a ; modules of a	也可用 $\text{abs } a$
11-5.13	$\text{sgn } a$	a 的符号函数 signum a	对于实数 a : $\text{sgn } a = \begin{cases} 1 & \text{当 } a > 0 \\ 0 & \text{当 } a = 0 \\ -1 & \text{当 } a < 0 \end{cases}$ 对于复数 a ,参阅 11-9.7
11-5.14	$\bar{a}, \langle a \rangle$	a 的平均值 mean value of a	如果平均值的求法在文中不明,则应指出其形成的方法。若 $\bar{a}$ 容易与 a 的复共轭混淆时,就用 $\langle a \rangle$
11-5.15	$n!$	n 的阶乘 factorial n	$n \geq 1$ 时, $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ $n = 0$ 时, $n! = 1$
11-5.16	$\binom{n}{p}, C_n^p$	二项式系数;组合数 binomial coefficient n, p	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$
11-5.17	$\text{ent } a, E(a)$	小于或等于 a 的最大整数; 示性 a the greatest integer less than or equal to a ; characteristic of a	例: $\text{ent } 2.4 = 2$ $\text{ent}(-2.4) = -3$ 有时也用 $[a]$

2.6 函数符号

项号	符号,应用	意义或读法	备注及示例
11-6.1	f	函数 f function f	也可以表示为 $x \mapsto f(x)$
11-6.2	$f(x)$ $f(x, y, \dots)$	函数 f 在 x 或在 $(x, y, \dots)$ 的值 value of the function f at x or at $(x, y, \dots)$ respectively	也表示以 $x, y, \dots$ 为自变量的函数 f
11-6.3	$f(x) _a^b$ $[f(x)]_a^b$	$f(b) - f(a)$	这种表示法主要用于定积分计算
11-6.4	$g \circ f$	f 与 g 的合成函数或复合函数 the composite function of f and g	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
11-6.5	$x \rightarrow a$	x 趋于 a x tends to a	用 $x_n \rightarrow a$ 表示序列 $\{x_n\}$ 的极限为 a
11-6.6	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	x 趋于 a 时 $f(x)$ 的极限 limit of $f(x)$ as x tends to a	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 可以写为: $f(x) \rightarrow b$ 当 $x \rightarrow a$ 右极限及左极限可分别表示为: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
11-6.7	$\overline{\lim}$	上极限 superior limit	
11-6.8	$\underline{\lim}$	下极限 inferior limit	
11-6.9	$\sup$	上确界 supremum	
11-6.10	$\inf$	下确界 infimum	11-6.7 至 11-6.10 取材于[2]
11-6.11	$\simeq$	渐近等于 is asymptotically equal to	例: $\frac{1}{\sin(x-a)} \simeq \frac{1}{x-a}$ 当 $x \rightarrow a$

项号	符号,应用	意义或读法	备注及示例
11-6.12	$O(g(x))$	$f(x)=O(g(x))$ 的含义为 $ f(x)/g(x) $ 在行文所述的 极限中有上界 $ f(x)/g(x) $ is bounded above in the limit implied by the context	当 f/g 与 g/f 都有界时,称 f 与 g 是同阶的
11-6.13	$o(g(x))$	$f(x)=o(g(x))$ 表示在行文 所述的极限中 $f(x)/g(x)$ $\rightarrow 0$ $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ in the limit implied by the context	
11-6.14	Δx	x 的[有限]增量 (finite) increment of x	
11-6.15	$\frac{df}{dx}$ df/dx f'	单变量函数 f 的导[函]数 或微商 derivative of the function f of one variable	也可用 Df 。 即: $\frac{df(x)}{dx}$, $df(x)/dx, f'(x), Df(x)$ 。 如自变量为时间 t ,也可用 f 表 示 df/dt
11-6.16	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ $(df/dx)_{x=a}$ $f'(a)$	函数 f 的导[函]数在 a 的 value at a of the derivative of the function f	也可用 $\frac{df}{dx}\Big _{x=a}$ 或 $Df(a)$
11-6.17	$\frac{d^n f}{dx^n}$ $d^n f/dx^n$ $f^{(n)}$	单变量函数 f 的 n 阶导函数 n th derivative of the function f of one variable	也可用 $D^n f$ 。 当 $n=2,3$ 时,也可用 f'', f''' 来 代替 $f^{(n)}$ 。如自变量是时间 t ,可 用 f 来代替 $\frac{d^2 f}{dt^2}$
11-6.18	$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\partial f/\partial x$ $\partial_x f$	多变量 $x, y, \dots$ 的函数 f 对 于 x 的偏微商或偏导数 partial derivative of the function f of several variables $x, y, \dots$ with respect to x	即: $\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}$, $\partial f(x, y, \dots)/\partial x, \partial_x f(x, y, \dots)$ 。 也可用 f_x 或 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y, \dots}$ $D_x = \frac{1}{i} \partial_x$ 等常用于 Fourier 变换

项号	符号,应用	意义或读法	备注及示例
11-6.19	$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^n \partial y^m}$	函数 f 先对 y 求 m 次偏微商, 再对 x 求 n 次偏微商; 混合偏导数 nth partial derivative of the function $\partial^m f / \partial y^m$ of several variables $x, y, \dots$ with respect to x ; mixed partial derivative	
11-6.20	$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$	u, v, w 对 x, y, z 的函数行列式 Jacobian; functional determinant of the functions u, v, w with respect to x, y, z	即: $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$ 11-6.19 与 11-6.20 选自[2]
11-6.21	df	函数 f 的全微分 total differential of the function f	$df(x, y, \dots) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots$
11-6.22	δf	函数 f 的(无穷小)变分 (infinitesimal) variation of the function f	
11-6.23	$\int f(x) dx$	函数 f 的不定积分 an indefinite integral of the function f	
11-6.24	$\int_a^b f(x) dx$ $\int_a^b f(x) dx$	函数 f 由 a 至 b 的定积分 definite integral of the function f from a to b	
11-6.25	$\iint_A f(x, y) dA$	函数 $f(x, y)$ 在集合 A 上的二重积分 the double integral of function $f(x, y)$ over set A	选自[2]。 $\int_C, \int_S, \int_V, \oint$ 分别用于沿曲线 C , 沿曲面 S , 沿体积 V 以及沿闭曲线或闭曲面的积分

项号	符号,应用	意义或读法	备注及示例
11-6.26	δ_{ik}	克罗内克 δ 符号 Kronecker delta symbol	$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = k \\ 0 & \text{当 } i \neq k \end{cases}$ 式中 i 与 k 均为整数
11-6.27	ϵ_{ijk}	勒维-契维塔符号 Levi-Civita symbol	$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的偶排列} \\ -1 & \text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的奇排列} \\ 0 & \text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的真重复排列} \end{cases}$
11-6.28	$\delta(x)$	狄拉克 δ 分布[函数] Dirac delta distribution (function)	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$
11-6.29	$\epsilon(x)$	单位阶跃函数;海维赛函数 unit step function; Heaviside function	$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$ 也可用 $H(x)$ $\vartheta(t)$ 用于时间的单位阶跃函数
11-6.30	$f * g$	f 与 g 的卷积 convolution of f and g	$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$

2.7 指数函数和对数函数符号

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-7.1	a^x	x 的指数函数(以 a 为底) exponential function (to the base a) of x	比较 11-5.9
11-7.2	e	自然对数的底 base of natural logarithms	$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718\,281\,8\cdots$
11-7.3	$e^x, \exp x$	x 的指数函数(以 e 为底) exponential function (to the base e) of x	在同一场合中,只用其中一种 符号

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-7.4	$\log_a x$	以 a 为底的 x 的对数 logarithm to the base a of x	当底数不必指出时,常用 $\log x$ 表示
11-7.5	$\ln x$	$\ln x = \log_e x$ x 的自然对数 natural logarithm of x	$\log x$ 不能用来代替 $\ln x, \lg x, \text{lb } x$ 或 $\log_e x, \log_{10} x, \log_2 x$
11-7.6	$\lg x$	$\lg x = \log_{10} x$ x 的常用对数 common (decimal) logarithm of x	参阅 11-7.5 的备注
11-7.7	$\text{lb } x$	$\text{lb } x = \log_2 x$ x 的以 2 为底的对数 binary logarithm of x	参阅 11-7.5 的备注

2.8 三角函数¹⁾和双曲函数符号

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-8.1	$\sin x$	x 的正弦 sine of x	
11-8.2	$\cos x$	x 的余弦 cosine of x	
11-8.3	$\tan x$	x 的正切 tangent of x	也可用 $\text{tg } x$
11-8.4	$\cot x$	x 的余切 cotangent of x	$\cot x = 1/\tan x$
11-8.5	$\sec x$	x 的正割 secant of x	$\sec x = 1/\cos x$
11-8.6	$\csc x$	x 的余割 cosecant of x	也可用 $\text{cosec } x$ $\csc x = 1/\sin x$

1) 在[1]中称为圆函数。

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-8.7	$\sin^m x$	$\sin x$ 的 m 次方 $\sin x$ to the power m	选自[2]。 其他三角函数和双曲函数的 m 次方的表示法类似
11-8.8	$\arcsin x$	x 的反正弦 arc sine of x	$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ 反正弦函数是正弦函数在上述限制下的反函数
11-8.9	$\arccos x$	x 的反余弦 arc cosine of x	$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$, $0 \leq y \leq \pi$ 反余弦函数是余弦函数在上述限制下的反函数
11-8.10	$\arctan x$	x 的反正切 arc tangent of x	也可用 $\operatorname{arctg} x$ 。 $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$ 反正切函数是正切函数在上述限制下的反函数
11-8.11	$\operatorname{arccot} x$	x 的反余切 arc cotangent of x	$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y$, $0 < y < \pi$ 反余切函数是余切函数在上述限制下的反函数
11-8.12	$\operatorname{arcsec} x$	x 的反正割 arc secant of x	$y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow x = \sec y$, $0 \leq y \leq \pi, y \neq \pi/2$ 反正割函数是正割函数在上述限制下的反函数
11-8.13	$\operatorname{arccsc} x$	x 的反余割 arc cosecant of x	也可用 $\operatorname{arccosec} x$ 。 $y = \operatorname{arccsc} x \Leftrightarrow x = \csc y$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2, y \neq 0$ 反余割函数是余割函数在上述限制下的反函数。 对于 11-8.8 至 11-8.13 各项不采用 $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ 等符号, 因为可能被误解为 $(\sin x)^{-1}, (\cos x)^{-1}$ 等

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-8.14	$\sinh x$	x 的双曲正弦 hyperbolic sine of x	也可用 $\text{sh } x$
11-8.15	$\cosh x$	x 的双曲余弦 hyperbolic cosine of x	也可用 $\text{ch } x$
11-8.16	$\tanh x$	x 的双曲正切 hyperbolic tangent of x	也可用 $\text{th } x$
11-8.17	$\coth x$	x 的双曲余切 hyperbolic cotangent of x	$\coth x = 1/\tanh x$
11-8.18	$\text{sech } x$	x 的双曲正割 hyperbolic secant of x	$\text{sech } x = 1/\cosh x$
11-8.19	$\text{csch } x$	x 的双曲余割 hyperbolic cosecant of x	也可用 $\text{cosech } x$ 。 $\text{csch } x = 1/\sinh x$
11-8.20	$\text{arsinh } x$	x 的反双曲正弦 inverse hyperbolic sine of x	也可用 $\text{arsh } x$ 。 $y = \text{arsinh } x \Leftrightarrow x = \sinh y$ 反双曲正弦函数是双曲正弦函数的反函数
11-8.21	$\text{arcosh } x$	x 的反双曲余弦 inverse hyperbolic cosine of x	也可用 $\text{arch } x$ 。 $y = \text{arcosh } x \Leftrightarrow x = \cosh y$, $y \geq 0$ 反双曲余弦函数是双曲余弦函数在上述限制下的反函数
11-8.22	$\text{artanh } x$	x 的反双曲正切 inverse hyperbolic tangent of x	也可用 $\text{arth } x$ 。 $y = \text{artanh } x \Leftrightarrow x = \tanh y$ 反双曲正切函数是双曲正切函数的反函数
11-8.23	$\text{arcoth } x$	x 的反双曲余切 inverse hyperbolic cotangent of x	$y = \text{arcoth } x \Leftrightarrow x = \coth y$, $y \neq 0$ 反双曲余切函数是双曲余切函数在上述限制下的反函数

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-8.24	$\operatorname{arsech} x$	x 的反双曲正割 inverse hyperbolic secant of x	$y = \operatorname{arsech} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sech} y$, $y \geq 0$ 反双曲正割函数是双曲正割函数在上述限制下的反函数
11-8.25	$\operatorname{arcsch} x$	x 的反双曲余割 inverse hyperbolic cosecant of x	也可用 $\operatorname{arcosech} x$ 。 $y = \operatorname{arcsch} x \Leftrightarrow x = \operatorname{csch} y$, $y \neq 0$ 反双曲余割函数是双曲余割函数在上述限制下的反函数。 对于反双曲函数,不应使用 $\sinh^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$ 等符号,因为可能被误解为 $(\sinh x)^{-1}$, $(\cosh x)^{-1}$ 等

2.9 复数符号

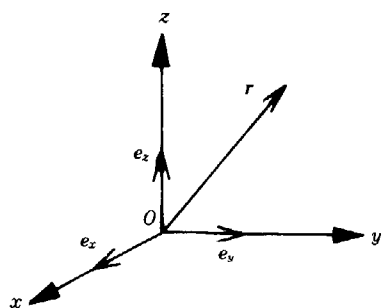
项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-9.1	i, j	虚数单位, $i^2 = -1$ imaginary unit	在电工技术中常用 j , 参阅 GB 3102.5 的 5-44.1 的备注
11-9.2	$\operatorname{Re} z$	z 的实部 real part of z	
11-9.3	$\operatorname{Im} z$	z 的虚部 imaginary part of z	$z = x + iy$ 其中 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$
11-9.4	$ z $	z 的绝对值; z 的模 absolute value of z ; modulus of z	也可用 $\operatorname{mod} z$
11-9.5	$\arg z$	z 的辐角; z 的相 argument of z ; phase of z	$z = re^{i\varphi}$ 其中 $r = z $, $\varphi = \arg z$, 即 $\operatorname{Re} z = r \cos \varphi$, $\operatorname{Im} z = r \sin \varphi$
11-9.6	z^*	z 的[复]共轭 (complex) conjugate of z	有时用 $\bar{z}$ 代替 z^*
11-9.7	$\operatorname{sgn} z$	z 的单位模函数 signum z	当 $z \neq 0$ 时, $\operatorname{sgn} z = z/ z = \exp(i \arg z)$; 当 $z = 0$ 时, $\operatorname{sgn} z = 0$

2.10 矩阵符号

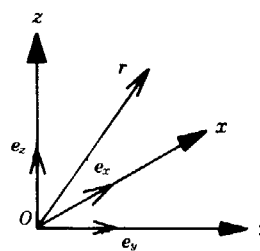
项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-10.1	A $\begin{pmatrix} A_{11} \cdots A_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ A_{m1} \cdots A_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$ 型的矩阵 A matrix A of type m by n	也可用 $A = (A_{ij})$, A_{ij} 是矩阵 A 的元素; m 为行数, n 为列数。当 $m=n$ 时, A 称为[正]方阵。矩阵元可用小写字母表示。 也可用方括号代替矩阵表示中的圆括号
11-10.2	AB	矩阵 A 与 B 的积 product of matrices A and B	$(AB)_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$ 式中 A 的列数必须等于 B 的行数
11-10.3	E, I	单位矩阵 unit matrix	方阵的元素 $E_{ik} = \delta_{ik}$, 参阅 11-6.26
11-10.4	A^{-1}	方阵 A 的逆 inverse of the square matrix A	$AA^{-1} = A^{-1}A = E$
11-10.5	$A^T, \tilde{A}$	A 的转置矩阵 transpose matrix of A	$(A^T)_{ik} = A_{ki}$ 也可用 A'
11-10.6	A^*	A 的复共轭矩阵 complex conjugate matrix of A	$(A^*)_{ik} = (A_{ik})^* = A_{ik}^*$ 在数学中也常用 $\bar{A}$
11-10.7	$A^H, A^\dagger$	A 的厄米特共轭矩阵 Hermitian conjugate matrix of A	$(A^H)_{ik} = (A_{ki})^* = A_{ki}^*$ 在数学中也常用 A^*
11-10.8	$\det A$ $\begin{vmatrix} A_{11} \cdots A_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ A_{n1} \cdots A_{nn} \end{vmatrix}$	方阵 A 的行列式 determinant of the square matrix A	
11-10.9	$\text{tr } A$	方阵 A 的迹 trace of the square matrix A	$\text{tr } A = \sum_i A_{ii}$
11-10.10	$\ A\ $	矩阵 A 的范数 norm of the matrix A	矩阵的范数有各种定义, 例如范数 $\ A\ = (\text{tr}(AA^H))^{1/2}$

2.11 坐标系符号

项号	坐标	径矢量及其微分	坐标系名称	备 注
11-11.1	x, y, z	$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$ $d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$	笛卡儿坐标 cartesian coordinates	$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 与 $\mathbf{e}_z$ 组成一标准正交右手系, 见图 1
11-11.2	ρ, φ, z	$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho(\varphi) + z\mathbf{e}_z, d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho(\varphi) + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi(\varphi) + dz\mathbf{e}_z$	圆柱坐标 cylindrical coordinates	$\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi$ 与 $\mathbf{e}_z$ 组成一标准正交右手系, 见图 3 和图 4。 若 $z=0$, 则 ρ 与 φ 成为极坐标
11-11.3	r, θ, φ	$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r(\theta, \varphi), d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r(\theta, \varphi) + r d\theta\mathbf{e}_\theta(\theta, \varphi) + r \sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$	球坐标 spherical coordinates	$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ 与 $\mathbf{e}_\varphi$ 组成一标准正交右手系, 见图 3 和图 5
注: 如果为了某些目的, 例外地使用左手坐标系(见图 2)时, 必须明确地说出, 以免引起符号错误				



x 轴方向朝外
图 1 右手笛卡儿坐标系



x 轴方向朝里
图 2 左手笛卡儿坐标系

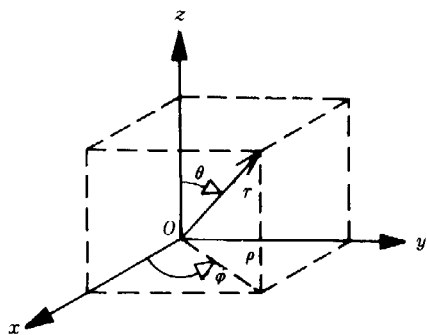
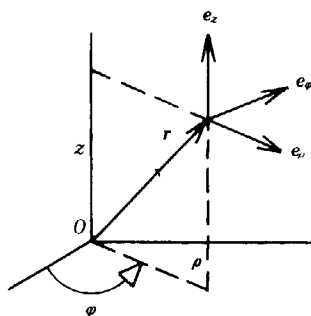
图 3 $Oxyz$ 是右手坐标系

图 4 右手柱坐标

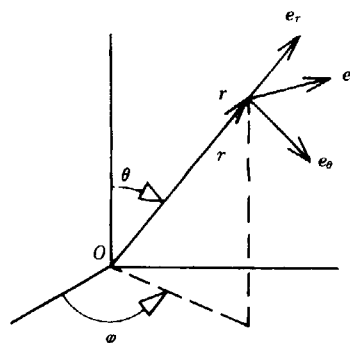


图 5 右手球坐标

2.12 矢量和张量符号

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-12.1	$\mathbf{a}$ $\vec{a}$	矢量或向量 $\mathbf{a}$ vector $\mathbf{a}$	这里,笛卡儿坐标用 x, y, z 或 x_1, x_2, x_3 表示,在后一种情况,指标 i, j, k, l 从 1 到 3 取值,并采用下面的求和约定:如果在一项中某个指标出现两次,则表示该指标对 1, 2, 3 求和。 印刷用黑体 $\mathbf{a}$,书写用 $\vec{a}$
11-12.2	a $ \mathbf{a} $	矢量 $\mathbf{a}$ 的模或长度 magnitude of vector $\mathbf{a}$	也可用 $\ \mathbf{a}\ $
11-12.3	$\mathbf{e}_a$	$\mathbf{a}$ 方向的单位矢量 unit vector in the direction of $\mathbf{a}$	$\mathbf{e}_a = \mathbf{a}/ \mathbf{a} $ $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_a$
11-12.4	$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ $\mathbf{e}_i$	在笛卡儿坐标轴方向的单位矢量 unit vectors in the directions of the cartesian coordinate axes	
11-12.5	a_x, a_y, a_z a_i	矢量 $\mathbf{a}$ 的笛卡儿分量 cartesian components of vector $\mathbf{a}$	$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z = (a_x, a_y, a_z)$, $a_x\mathbf{e}_x$ 等为分矢量。 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ 为径矢
11-12.6	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的标量积或数量积 scalar product of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = \sum_i a_i b_i$ (参阅 11-12.1 的备注)。 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = \mathbf{a} ^2 = a^2$ 在特殊场合,也可用 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
11-12.7	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的矢量积或向量积 vector product of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$	在右手笛卡儿坐标系中,分量 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$, 一般 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} a_j b_k$ 对于 ϵ_{ijk} ,参阅 11-6.27

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-12.8	∇ $\vec{\nabla}$	那勃勒算子或算符 nabla operator	也称矢量微分算子。 $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 也可用 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$
11-12.9	$\nabla \varphi$ $\mathbf{grad} \varphi$	φ 的梯度 gradient of φ	也可用 $\mathbf{grad} \varphi$ $\nabla \varphi = \mathbf{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$
11-12.10	$\nabla \cdot \mathbf{a}$ $\text{div } \mathbf{a}$	$\mathbf{a}$ 的散度 divergence of $\mathbf{a}$	$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$
11-12.11	$\nabla \times \mathbf{a}$ $\mathbf{rot} \mathbf{a}$ $\mathbf{curl} \mathbf{a}$	$\mathbf{a}$ 的旋度 curl of $\mathbf{a}$	气象学上称为涡度。 也可用 $\mathbf{rot} \mathbf{a}$, $\mathbf{curl} \mathbf{a}$ 。 $(\nabla \times \mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$, 一般 $(\nabla \times \mathbf{a})_i = \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$, 关于 ϵ_{ijk} , 参阅 11-6.27
11-12.12	∇^2 Δ	拉普拉斯算子 Laplacian	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 若与 11-6.14 中有限增量的符号容易混淆时,就用 ∇^2
11-12.13	$\square$	达朗贝尔算子 Dalembertian	$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 式中 c 为电磁波在真空中的传播速度,参阅 GB 3102.6 的 6-6
11-12.14	$\mathbf{T}$	二阶张量 $\mathbf{T}$ tensor $\mathbf{T}$ of the second order	也用 $\vec{\vec{T}}$
11-12.15	$T_{xx}, T_{xy}, \dots, T_{zz}$ T_{ij}	张量 $\mathbf{T}$ 的笛卡儿分量 cartesian components of tensor $\mathbf{T}$	$\mathbf{T} = T_{xx} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + T_{xy} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + \dots$, $T_{xx} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x$ 等为分张量

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-12.16	$\mathbf{ab}, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	两矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的并矢积或张量积 dyadic product; tensor product of two vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$	即具有分量 $(\mathbf{ab})_{ij} = a_i b_j$ 的二阶张量
11-12.17	$\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}$	两个二阶张量 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{S}$ 的张量积 tensor product of two tensors $\mathbf{T}$ and $\mathbf{S}$ of the second order	即具有分量 $(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S})_{ijkl} = T_{ij} S_{kl}$ 的四阶张量
11-12.18	$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$	两个二阶张量 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{S}$ 的内积 inner product of two tensors of second order $\mathbf{T}$ and $\mathbf{S}$	即具有分量 $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})_{ik} = \sum_j T_{ij} S_{jk}$ 的二阶张量
11-12.19	$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$	二阶张量 $\mathbf{T}$ 与矢量 $\mathbf{a}$ 的内积 inner product of a tensor of second order $\mathbf{T}$ and a vector $\mathbf{a}$	即具有分量 $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{a})_i = \sum_j T_{ij} a_j$ 的矢量
11-12.20	$\mathbf{T} : \mathbf{S}$	两个二阶张量 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{S}$ 的标量积 scalar product of two tensors of second order $\mathbf{T}$ and $\mathbf{S}$	即标量 $\mathbf{T} : \mathbf{S} = \sum_i \sum_j T_{ij} S_{ji}$ 11-12.1 至 11-12.20 注: 矢量和张量往往用其分量的通用符号表示, 例如矢量用 a_i , 二阶张量用 T_{ij} , 并矢积用 $a_i b_j$ 等等, 但这里指的都是张量的协变分量, 张量还具有其他形式的分量, 如逆变分量、混合分量等

2.13 特殊函数符号

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-13.1	$J_l(x)$	[第一类]柱贝塞尔函数 cylindrical Bessel functions (of the first kind)	即方程 $x^2 y'' + xy' + (x^2 - l^2)y = 0$ 的特解 $J_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{l+2k}}{k! \Gamma(l+k+1)}$ $(l \geq 0)$ 关于 Γ , 参阅 11-13.19
11-13.2	$N_l(x)$	柱诺依曼函数; 第二类柱贝塞尔函数 cylindrical Neumann functions; cylindrical Bessel functions of the second kind	$N_l(x) = \lim_{k \rightarrow l} \frac{J_k(x) \cos k\pi - J_{-k}(x)}{\sin k\pi}$ 也记作 $Y_l(x)$
11-13.3	$H_l^{(1)}(x)$ $H_l^{(2)}(x)$	柱汉开尔函数; 第三类柱贝塞尔函数 cylindrical Hankel functions; cylindrical Bessel functions of the third kind	$H_l^{(1)}(x) = J_l(x) + iN_l(x),$ $H_l^{(2)}(x) = J_l(x) - iN_l(x)$
11-13.4	$I_l(x)$ $K_l(x)$	修正的柱贝塞尔函数 modified cylindrical Bessel functions	$x^2 y'' + xy' - (x^2 + l^2)y = 0$ 的特解 $I_l(x) = i^{-l} J_l(ix),$ $K_l(x) = (\pi/2) i^{l+1} (J_l(ix) + iN_l(ix))$
11-13.5	$j_l(x)$	[第一类]球贝塞尔函数 spherical Bessel functions (of the first kind)	$x^2 y'' + 2xy' + [x^2 - l(l+1)]y = 0 \quad (l \geq 0)$ 的特解 $j_l(x) = (\pi/2x)^{1/2} J_{l+1/2}(x)$
11-13.6	$n_l(x)$	球诺依曼函数; 第二类球贝塞尔函数 spherical Neumann functions; spherical Bessel functions of the second kind	$n_l(x) = (\pi/2x)^{1/2} N_{l+1/2}(x)$ 也记作 $y_l(x)$

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-13.7	$h_l^{(1)}(x)$ $h_l^{(2)}(x)$	球汉开尔函数;第三类球贝塞尔函数 spherical Hankel functions; spherical Bessel functions of the third kind	$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x) = (\pi/2x)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(x)$, $h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x) = (\pi/2x)^{1/2} H_{l+1/2}^{(2)}(x)$ 修正的球贝塞尔函数分别写为 $i_l(x)$ 与 $k_l(x)$; 比较 11-13.4
11-13.8	$P_l(x)$	勒让德多项式 Legendre polynomials	$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$ 的特解 $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l$ ($l \in \mathbf{N}$)
11-13.9	$P_l^m(x)$	关联勒让德函数 associated Legendre functions	$(1-x^2)y'' - 2xy' + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y = 0$ 的特解 $P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ ($l, m \in \mathbf{N}; m \leq l$)
11-13.10	$Y_l^m(\theta, \varphi)$	球面调和函数, 球谐函数 spherical harmonics	$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial y}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)y = 0$ 的特解 $Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \times$ $\left[\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l- m)!}{(l+ m)!} \right]^{1/2} \times$ $P_l^{ m }(\cos \theta) e^{im\varphi}$ ($l, m \in \mathbf{N}; m \leq l$)
11-13.11	$H_n(x)$	厄米特多项式 Hermite polynomials	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$ 的特解 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ ($n \in \mathbf{N}$)
11-13.12	$L_n(x)$	拉盖尔多项式 Laguerre polynomials	$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ 的特解 $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ ($n \in \mathbf{N}$)

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-13.13	$L_n^m(x)$	关联拉盖尔多项式 associated laguerre polynomials	$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$ 的特解 $L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \quad (m, n \in \mathbb{N}; m \leq n)$
11-13.14	$F(a, b; c; x)$	超几何函数 hypergeometric functions	$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$ 的特解 $F(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \dots$
11-13.15	$F(a; c; x)$	合流超几何函数 confluent hypergeometric functions	$xy'' + (c-x)y' - ay = 0$ 的特解 $F(a; c; x) = 1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \dots$
11-13.16	$F(k, \varphi)$	第一类[不完全]椭圆积分 (incomplete) elliptic integral of the first kind	$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$ $F(k) = F(k, \pi/2) \quad (0 < k < 1)$ 为第一类完全椭圆积分
11-13.17	$E(k, \varphi)$	第二类[不完全]椭圆积分 (incomplete) elliptic integral of the second kind	$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$ $E(k) = E(k, \pi/2) \quad (0 < k < 1)$ 为第二类完全椭圆积分
11-13.18	$\Pi(k, n, \varphi)$	第三类[不完全]椭圆积分 (incomplete) elliptic integral of the third kind	$\Pi(k, n, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1+n \sin^2 \theta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$ $\Pi(k, n, \pi/2) \quad (0 < k < 1)$ 为第三类完全椭圆积分

项号	符号,表达式	意义或读法	备注及示例
11-13.19	$\Gamma(x)$	Γ (伽马)函数 gamma function	$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$ $\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$
11-13.20	$B(x,y)$	B (贝塔)函数 beta function	$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ $(x,y \in \mathbb{R}; x > 0, y > 0)$ $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$
11-13.21	$Ei\ x$	指数积分 exponential integral	$Ei\ x = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x \neq 0)$
11-13.22	$\operatorname{erf} x$	误差函数 error function	$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$ $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x \text{ 称为余误差函数。}$ 在统计学中,使用分布函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$
11-13.23	$\zeta(x)$	黎曼(泽塔)函数 Riemann zeta function	$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$ $(x > 1)$

附加说明:

本标准由全国量和单位标准化技术委员会提出并归口。

本标准由全国量和单位标准化技术委员会第七分委员会负责起草。

本标准主要起草人李志深。